Revista Científica de FAREM-Estelí
Medio ambiente, tecnología y desarrollo humano
Año 12 | Núm. 45 | Enero-marzo, 20223
ISSN: 2305-5790
https://rcientificaesteli.unan.edu.ni
DOI: https://doi.org/10.5377/farem.v12i45.16044

Estabilidad del equilibrio de Nash de un juego de Cournot con bienes diferenciados y función de demanda cóncava

Nash equilibrium stability of a Cournot game with differentiated goods and concave demand function

Jony Rojas Rojas
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua. UNAN-Managua, Nicaragua
https://orcid.org/0000-0003-4428-5127
jonyrojas2029@gmail.com

Enrique Boanerge Pérez Avalos
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua. UNAN-Managua, Nicaragua
https://orcid.org/0000-0003-1984-1697
eperezavalos666@gmail.com

Recibido
14/12/2022

Aceptado
21/03/2023

RESUMEN

En un juego no cooperativo, el beneficio de los agentes involucrados en el juego depende de su función de pago y la estrategia empleada por cada agente. En el caso particular de un juego no cooperativo de Cournot, la elección estratégica de cada agente es la cantidad de bien a producir y su función de pago coincide con la función de beneficio. Este artículo se propuso investigar el equilibrio de Nash y su estabilidad en un juego no cooperativo de Cournot con bienes diferenciados y función de demanda cóncava. El método empleado fue el de la economía matemática y, además, se utilizó una metodología de trabajo que se basa en la revisión bibliográfica, estudio de diversos procedimientos matemáticos y la simulación numérica en el software estadístico R. Como resultado se tiene un nuevo juego no cooperativo bipersonal de Cournot donde la función de demanda es cóncava y se demuestra que este juego tiene un único equilibrio de Nash que, además, es simétrico. Se concluye que, bajo la regla de actualización estratégica de expectativa ingenua, el equilibrio de Nash simétrico es asintóticamente estable y la permanencia en el mercado de las empresas solo es posible si ambas siguen la estrategia de imitación, es decir, cada empresa produce la misma cantidad de bien que su oponente en cada período de tiempo.

PALABRAS CLAVE

Duopolio de Cournot; bienes diferenciados; estabilidad y equilibrio de Nash.

ABSTRACT

In a non-cooperative game, the benefit of the agents involved in the game depends on their payment function and the strategy employed by each agent. In the particular case of a non-cooperative Cournot game, the strategic choice of each agent is the quantity of good to be produced and its payment function coincides with the benefit function. This paper set out to investigate the Nash equilibrium and its stability in a noncooperative Cournot game with differentiated goods and concave demand function. The method used was that of mathematical economics and, in addition, a methodology based on literature review, study of various mathematical procedures and numerical simulation in the statistical software R. As a result, we have a new bipersonal non-cooperative Cournot game where the demand function is concave and it is shown that this game has a unique Nash equilibrium which, in addition, is symmetric. It is concluded that, under the naive expectation strategic updating rule, the symmetric Nash equilibrium is asymptotically stable and the permanence in the market of the firms is only possible if both follow the imitation strategy, each firm produces the same amount of good as its opponent in each time period.

KEYWORDS

Cournot duopoly; differentiated goods; stability and Nash equilibrium.

INTRODUCCIÓN

El comportamiento estratégico de dos empresas cuando compiten en un mismo mercado ha sido de interés de varios investigadores. Los primeros trabajos alrededor de dicha temática fueron publicados por Cournot (1838) y Bertrand (1883). Cournot (1838) propone un modelo de duopolio en el que las empresas compiten ofreciendo un producto homogéneo y el beneficio de cada empresa es función de la cantidad producida (variables estratégicas) por ambas empresas. Para Bertrand (1883) las empresas compiten ofreciendo un producto homogéneo, pero las variables estratégicas son los precios, es decir, el beneficio de cada empresa es función de los precios que impongan en el mercado.

Para realizar el análisis estratégico de las empresas, Cournot propone un juego no cooperativo bipersonal infinito, donde la elección estratégica de las empresas es la cantidad a producir y la demanda queda establecida por una función lineal en la cantidad total de bienes a producir. Él demuestra la existencia y unicidad de un equilibrio de Nash del juego propuesto. Un supuesto importante en el modelo de Cournot es la homogeneidad de los bienes; en contraposición, Dixit (1979) y Singh y Vives (1984) estudian un modelo de duopolio con bienes diferenciados y función de demanda lineal.

Más recientemente Askar (2014) propone un modelo de oligopolio de Cournot donde la demanda está determinada por una función polinómica de grado cuatro sin puntos de inflexión. Éste demuestra la existencia y unicidad del equilibrio de Nash en su modelo, además investiga el comportamiento asintótico de dicho equilibrio, mostrando a través de simulación numérica la existencia de regiones de estabilidad y de bifurcación.

En los modelos de duopolio se encuentran juegos no cooperativos donde la función de pago es lineal (Cournot, 1838 y Bertrand, 1883) y, más recientemente, polinómica (Askar, 2014). Sin embargo, Askar no consideró los casos en que la función de pago sea un polinomio de grado dos, tres o en general de grado . El estudio de los casos no abordados por Askar (2014) es muy importante, porque contribuiría al enriquecimiento de la teoría de duopolio, teoría de juegos no cooperativos, al entendimiento de los equilibrios de Nash en diferentes contextos, así como, la compresión del comportamiento estratégico de las empresas que compiten en un mismo mercado.

En este trabajo se estudia un duopolio de Cournot con bienes diferenciados y función de demanda inversa dada por una función polinómica de grado dos. El propósito de la investigación es investigar el equilibrio de Nash y su estabilidad en un juego no cooperativo de Cournot con bienes diferenciados y función de demanda cóncava. Para ello, se propone un modelo basado en un sistema de ecuaciones no lineales en diferencias, donde las empresas ajustan su decisión de acuerdo a las reglas de Naimzada y Tramontana (2012):

1.

1. La estrategia de producción se actualiza de forma discreta en el tiempo.
2. Las empresas no tienen información completa acerca de la estrategia de producción de su rival.
3. Cada empresa actualiza su estrategia de producción según la regla de expectativa ingenua o estática.

Conceptos básicos

A continuación, se enuncia una serie de definiciones que serán de mucha utilidad en la comprensión de las siguientes secciones.

Definición 1. Un pago (beneficio) es una función $\pi: A \rightarrow R$ que asocia un número real a cada acción $a \in A$.

Definición 2. Un juego en forma estratégica (o en forma normal) es una tripleta $(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\pi_i\}_{i \in N})$, donde *N* es un conjunto finito de jugadores, $\{S_i\}_{i \in N}$, contiene el conjunto de estrategias para cada jugador y $\{\pi_i\}_{i \in N}$ especifica el pago de cada jugador.

Observación: Si cada S_i es finito para cada $i \in N$, el juego se llama finito, en caso contrario se llama infinito.

Definición 3. Sea $(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\pi_i\}_{i \in N})$, un juego en forma normal. Un perfil de estrategias para el juego es un vector $(s_1, s_2, \ldots, s_n) \in S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, donde es la cardinalidad del conjunto .

Definición 4. Sea $(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\pi_i\}_{i \in N})$, un juego en forma normal. Un perfil de estrategias $(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_n^*)$ es un equilibrio de Nash si para cada jugador *i*,
$\pi_i (s_1^*, s_2^*, \ldots s_i^*, \ldots, s_n^*) \geq \pi_i (s_1^*, s_2^*, \ldots s_i, \ldots, s_n^*), \forall\ s_i \in S_i$.

Es decir, para cada jugador i ,s_i^* es una solución del problema

max $\pi_i (s_1^*, s_2^*, \ldots s_i^*, \ldots, s_n^*)$ donde s_i es la variable de decisión.

Observación: Si un equilibrio de Nash $(s_1^*, s_2^*, \ldots n s_n^*)$ para un juego $(N, \{S_i\}_{i \in N}, \{\pi_i\}_{i \in N})$ en forma normal cumple que $(s_1^* = s_2^* = \cdots = s_n^*)$, entonces el equilibrio de Nash se llama simétrico.

MATERIALES Y MÉTODOS

Para la realización del estudio se empleó como método la economía matemática. Este método es utilizado en el análisis económico, en el cual el economista emplea símbolos matemáticos para enunciar los problemas y se basa en teoremas matemáticos para auxiliarse en el razonamiento Chiang y Wainwright (2004/2006).

En cuanto a la metodología empleada en este trabajo, esta siguió las siguientes etapas:

1. Revisión bibliográfica sobre modelos de juegos no cooperativos de Cournot y modelos para el análisis de la estabilidad del equilibrio de Nash.
2. Estudio de diversos procedimientos matemáticos mediante la combinación del álgebra, técnicas del cálculo diferencial en varias variables y la teoría de juegos no cooperativos.
3. Simulación numérica del comportamiento del equilibro mediante en el software estadístico R.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Esta sección se inicia con la conceptualización del juego no cooperativo bipersonal de Cournot, el cual se analizará para averiguar la existencia de equilibrios de Nash.

Juego no cooperativo bipersonal **de Cournot**

Considérese un mercado formado por dos empresas, 1 y 2. Se supone que cada empresa $i, i=1\ ,2$, realiza su elección estratégica de forma simultánea con la empresa $j, j \neq i$ y que ambas compiten a la Cournot, es decir, en la cantidad del bien a producir. Además, ambas empresas buscan maximizar sus ganancias y tienen información completa del mercado.

El producto de la empresa es diferente al producto de la empresa en una serie de características, y los consumidores tienen un gusto por la variedad según lo descrito por Beath y Katsoulacos (1991). Un ejemplo de un modelo con este tipo de diferenciación puede encontrarse en Bowley (1924), Dixit (1979) y Singh y Vives (1984).

Askar (2014) propone un juego no cooperativo de Cournot donde la función de demanda inversa es un polinomio de cuarto grado en la cantidad del bien a producir, en este trabajo, se propone un juego no cooperativo de Cournot similar al de Askar (2014), pero con funciones de demanda inversa dadas por un polinomio de segundo grado:

$$p_1 = a - (q_1 + dq_2)^2 \quad (1)$$

$$p_2 = a - (q_2 + dq_1)^2 \quad (2)$$

donde $a > 0$ y $0 \leq d \leq 1$. El parámetro a denota el tamaño del mercado y d el grado de diferenciación de los productos producidos por ambas firmas. Nótese que si $d = 1$, entonces ambas funciones de demanda son idénticas, es decir, los bienes son perfectamente sustitutos. Si $d = 0$, entonces cada empresa se comporta como un monopolio. Además, al ser p_1 y p_2 polinomios de segundo grado en las cantidades del bien a producir por ambas empresas con coeficientes negativos salvo el tamaño del mercado, se tiene que las funciones de demanda son cóncavas.

La función de beneficio para la empresa *i* (*i*=1,2) es

$$\pi_i = (p_i - c)q_i, \qquad (3)$$

con c ∈ (0,a) denotando el costo marginal. Se asume que el costo marginal es común para ambas empresas porque no se desea introducir otro foco de heterogeneidad entre las empresas que no sea d, ya que parte del propósito de este estudio es analizar el efecto en la estabilidad del equilibrio de Nash que tiene el grado de diferenciación d, cuando las funciones de demanda son cóncavas.

De acuerdo con las ecuaciones (1) - (3), las funciones de beneficio se pueden expresar como

$$\pi_1 = (a - c - (q_1 + dq_2)^2)q_1 \qquad (4)$$
$$\pi_2 = (a - c - (q_1 + dq_2)^2)q_2. \qquad (5)$$

La derivada de π_1 con respecto a q_1 es entonces

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = -2(q_1 + dq_2)q_1 + a - c - (q_1 + dq_2)^2$$

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = -(q_1 + dq_2)(2q_1 + q_1 + dq_2) + a - c$$

$$\frac{d\pi_1}{dq_1} = a - c - (q_1 + dq_2)(3q_1 + dq_2). \qquad (6)$$

En forma análoga se calcula la derivada de π_2 con respecto a q_2, dando como resultado

$$\frac{d\pi_2}{dq_2} = a - c - (q_2 + dq_1)(3q_2 + dq_1) \qquad (7)$$

Así, las condiciones de primer orden para el problema de maximización de beneficios de cada firma,

$$\frac{d\pi_i}{dq_i} = 0, \qquad (i = 1,2) \qquad (8)$$

producen las siguientes ecuaciones

$$a - c - (q_1 + dq_2)(3q_1 + dq_2) = 0 \quad (9)$$

$$a - c - (q_2 + dq_1)(3q_2 + dq_1) = 0. \quad (10)$$

Como es conocido, la única solución admisible (q_1, $q_2 \geq 0$) de las ecuaciones (9) – (10) es el equilibrio de Nash.

Según las ecuaciones (9) – (10),

$$(q_1 + dq_2)(3q_1 + dq_2) = a - c = (q_2 + dq_1)(3q_2 + dq_1), \quad (11)$$

es decir,

$$3q_1^2 + 4dq_1q_2 + d^2q_2^2 = 3q_2^2 + 4dq_1q_2 + d^2q_1^2. \quad (12)$$

Luego,

$$3q_1^2 + d^2q_2^2 = 3q_2^2 + d^2q_1^2, \quad (13)$$

por lo cual

$$(3 - d^2)(q_1^2 - q_2^2) = 0. \quad (14)$$

De la ecuación (14) se sigue que q_1^2 - q_2^2 = 0, ya que el factor 3 - d^2 es distinto de cero en virtud de la restricción $0 \leq d \leq 1$. Por tanto, $q_1^2 = q_2^2$, lo que equivale a decir que q_1 - q_2 ya que q_1 - $q_2 \geq 0$.

Como $q_1 = q_2$, usaremos una misma notación para ambas variables, digamos q^*. Al reemplazar q_1 y q_2 por q^*, en cualquiera de las ecuaciones (9) - (10), se obtiene la ecuación cuadrática

$$a - c - (1 + d)(3 + d)(q^*)^2 = 0. \quad (15)$$

Luego

$$q_*^2 = \frac{a - c}{(1 + d)(3 + d)}. \quad (16)$$

De la ecuación (16) se obtienen dos posibles soluciones para q^*: $q^* = \sqrt{\frac{a-c}{(1+d)(3+d)}}$, o

, o bien $q^* = -\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}$. La segunda solución se descarta en virtud de la condición de que q^* debe ser no negativo, ya que q^* representa la cantidad del bien a producir. Por tanto

$$q^* = q_1 = q_2 = \sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}. \quad (17)$$

Como (q^*,q^*) es la solución simultanea de las ecuaciones (9) - (10), entonces es el equilibrio de Nash del juego no cooperativo de Cournot propuesto. A demás, al ser $q_1=q_2=q^*$, el equilibrio de Nash es simétrico.

La relación $q_1=q_2=q^*$ lleva a la siguiente cadena de igualdades

$$\pi_1 = \pi_2 = (a - c - (q^* + dq^*)^2)q^*,$$

$$\pi_1 = \pi_2 = (a - c - (1+d)^2(q^*)^2)q^*,$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \left(a - c - (1+d)^2\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}\right)\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}},$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \left((a-c)\left(1 - \frac{1+d}{d+3}\right)\right)\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}},$$

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{2(a-c)}{d+3}\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}. \quad (18)$$

Luego, el beneficio de cada empresa en el equilibrio de Nash simétrico es

$$\frac{2(a-c)}{d+3}\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}. \quad (19)$$

Todo lo hecho hasta el momento permite establecer la siguiente:

Proposición. El juego no cooperativo de Cournot $(N=\{1,2\},\{S_1=[0,+\infty),S_2=[0,+\infty)\},\{\pi_1,\pi_2\})$ con π_1 y π_2 dadas por las ecuaciones (4) - (5) y $0\leq d\leq 1$, tiene un único equilibrio de Nash dado por la ecuación (17). Además, este equilibrio de Nash es simétrico.

Observación: La expresión (19), que representa el beneficio de cada empresa en el equilibrio de Nash simétrico, es decreciente en d, lo cual significa que a mayor diferenciación ($d \to 0$) mayor es el beneficio de cada firma. Además, sin importar los valores que tomen los parámetros (a, c y d) cada empresa permanece en el mercado, es decir, produce su bien y tiene beneficio positivo. Otro hecho interesante es la estabilidad del equilibrio de Nash simétrico, lo cual es analizado a continuación.

Análisis de la estabilidad del equilibrio de Nash

Para el análisis de la estabilidad del equilibrio de Nash (q^*, q^*), considérese un juego de duopolio de Cournot repetido. Este consiste en dos empresas de racionalidad acotada que actualizan su estrategia de producción de forma discreta en el tiempo. Además, el conjunto de estrategias admisibles para cada jugador en cada período de tiempo t es el conjunto $[0,+\infty)$ y el beneficio de cada empresa está dado por:

$$\pi_i^t = (p_i^t - c)q_i^t \,, i = 1,2. \quad (20)$$

La función de beneficio π_i^t se interpreta de la siguiente manera: en un período de tiempo $t \in N$ cada empresa de forma simultánea elige la cantidad del bien a producir y por tanto queda determinado el precio de cada bien por las ecuaciones (1) y (2). Luego, π_i^t es el beneficio de la empresa i en el período t.

En general, las empresas no tienen información completa acerca de la estrategia de producción a seguir en el próximo período por parte de la competencia. Debido a ello, cada empresa utiliza como regla de actualización para su elección estratégica la regla de expectativa ingenua o estática. Esta regla consiste en su poner que, la cantidad de bien a producir por la competencia en el período $t + 1$ es la misma que la del período t. En símbolos, la empresa i supone que la elección estratégica de la empresa $j \neq i$ en el período $t+1$ es $q_j^{t+1} = q_j^t$. Este supuesto ha sido utilizado por diversos autores, por ejemplo, Puu (1991), Szidarovszky (1999) y Naimzada y Tramontana (2012).

En el presente caso la empresa i supone que en el período $t+1$ la empresa $j \neq i$ produce q_j^t, esto significa que la función de mejor respuesta es el mecanismo instantáneo de ajuste del período $t+1$, es decir,

$$\begin{cases} q_1^{t+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c} - \dfrac{2}{3}dq_2^t, & (21) \\ q_2^{t+1} = \dfrac{1}{3}\sqrt{(dq_1^t)^2 + 3a - 3c} - \dfrac{2}{3}dq_1^t. & (22) \end{cases}$$

Las expresiones bajo los radicales en las ecuaciones anteriores son siempre positivas, ya que $a>c$.

Bajo el supuesto de que ambas empresas actualizan su elección estratégica siguiendo la regla de expectativa ingenua, se tiene que $q_1^{t+1} = q_1^t$ y $q_2^{t+1} = q_2^t$. Esto implica que el único punto estacionario del sistema (21) - (22) resulta ser el punto de equilibrio de Nash. Por tal razón este sistema permite analizar el efecto del parámetro d en la estabilidad del equilibrio de Nash.

El sistema (21) - (22) se puede expresar como la función vectorial

$$f = (q_1^{t+1}, q_2^{t+1}) = \left(\tfrac{1}{3}\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c} - \tfrac{2}{3}dq_2^t, \tfrac{1}{3}\sqrt{(dq_1^t)^2 + 3a - 3c} - \tfrac{2}{3}dq_1^t\right).$$

Como q_1^{t+1} no depende de q_1^t y q_2^{t+1} no depende de q_2^t, las derivadas parciales $\frac{\partial q_1^{t+1}}{\partial q_1^t}$ y $\frac{\partial q_2^{t+1}}{\partial q_2^t}$ son iguales a cero. Además,

$$\frac{\partial q_1^{t+1}}{\partial q_2^t} = \frac{\partial}{\partial q_2^t}\left(\frac{1}{3}\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c} - \frac{2}{3}dq_2^t\right)$$

$$-\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial q_2^t}\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c} - \frac{2}{3}d\frac{\partial q_2^t}{\partial q_2^t}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{2dq_2^t}{2\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c}} - \frac{2}{3}d$$

$$= -\frac{2}{3}d + \frac{dq_2^t}{3\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c}}$$

Así,

$$\frac{\partial q_1^{t+1}}{\partial q_2^t} = -\frac{2}{3}d + \frac{dq_2^t}{3\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c}}$$

y, en forma similar, se obtiene

$$\frac{\partial q_2^{t+1}}{\partial q_1^t} = -\frac{2}{3}d + \frac{\overset{2}{dq_1^t}}{3\sqrt{(dq_1^t)^2 + 3a - 3c}}.$$

Por tanto, la matriz jacobiana de la función vectorial o del sistema 4, es

$$J(q_1^{t+1}, q_2^{t+1}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1^{t+1}}{\partial q_1} & \frac{\partial q_1^{t+1}}{\partial q_2} \\ \frac{\partial q_2^{t+1}}{\partial q_1} & \frac{\partial q_2^{t+1}}{\partial q_2} \end{pmatrix},$$

$$J(q_1^{t+1}, q_2^{t+1}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3}d + \frac{d^2 q_2^t}{3\sqrt{(dq_2^t)^2 + 3a - 3c}} \\ -\frac{2}{3}d + \frac{d^2 q_1^t}{3\sqrt{(dq_1^t)^2 + 3a - 3c}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Para analizar la estabilidad del equilibrio de Nash simétrico hay que evaluar la matriz jacobiana $J(q_1^{t+1}, q_2^{t+1})$ en el punto $(q^*, q^*) = \left(\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}, \sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}\right)$. Por cuestiones de espacio, primero se evaluará la expresión

$$-\frac{2}{3}d+\frac{d^2q^*}{3\sqrt{(dq^*)^2+3a-3c}}$$

para $q^*=\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}$, con lo cual se obtiene

$$-\frac{2}{3}d+\frac{d^2q^*}{3\sqrt{(dq^*)^2+3a-3c}}=\frac{2}{3}d+\frac{d^2\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}}{3\sqrt{d^2\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}+3a-3c}}$$

$$=-\frac{2}{3}d+\frac{d^2\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}}{3\sqrt{\left(d^2\frac{1}{(d+1)(d+3)}+3\right)(a-c)}}$$

$$=-\frac{2}{3}d+\frac{d^2\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}}{3\sqrt{\left(\frac{d^2+3(d+1)(d+3)}{(d+1)(d+3)}\right)(a-c)}}$$

$$=-\frac{2}{3}d+\frac{d^2\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}}{3\sqrt{\left(\frac{4d^2+12d+9}{(d+1)(d+3)}\right)(a-c)}}$$

$$=-\frac{2}{3}d+\frac{d^2\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}}{3\sqrt{\left(\frac{(2d+3)^2}{(d+1)(d+3)}\right)(a-c)}}$$

$$=\frac{2}{3}d+\frac{d^2\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}}{3(2d+3)\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}}$$

$$=-\frac{2}{3}d+\frac{d^2}{3(2d+3)}=\frac{-2d(2d+3)+d^2}{3(2d+3)}$$

$$=\frac{-3d^2-6d}{3(2d+3)}=\frac{-3d(d+2}{3(2d+3)}=\frac{d(d+2)}{2d+3}.$$

De este modo,

$$-\frac{2}{3}d+\frac{d^2q^*}{3\sqrt{(dq^*)^2+3a-3c}}=\frac{d(d+2)}{2d+3}. \qquad (24)$$

De la ecuación (24) se deduce que, al evaluar la matriz jacobiana $J(q_1^{t+1}, q_2^{t+1})$ en el equilibrio de Nash simétrico $(q^*,q^*)=\left(\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}},\sqrt{\frac{a-c}{(d+1)(d+3)}}\right)$, se obtiene

$$J(q^*,q^*)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3}d+\frac{d^2q^*}{3\sqrt{(dq^*)^2+3a-3c}} \\ -\frac{2}{3}d+\frac{d^2q^*}{3\sqrt{(dq^*)^2+3a-3c}} & 0 \end{pmatrix}$$

$$J(q^*,q^*)=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{d(d+2)}{2d+3} \\ -\frac{d(d+2)}{2d+3} & 0 \end{pmatrix}. \qquad (25)$$

La traza y el determinante de la matriz $J(q^*,q^*)$ son $tr(J)=0$ y $\det(J)=-\left(\frac{d(d+2)}{2d+3}\right)^2$, son y respectivamente. Luego, su polinomio característico es

$$\lambda^2-tr(J)\lambda+\det(J)-\lambda^2-\left(\frac{d(d+2)}{2d+3}\right)^2, \qquad (26)$$

el cual tiene todas sus raíces reales. Según el teorema de Jury, el punto de equilibrio de Nash (q^*, q^*) es asintóticamente estable si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. *1+tr(J)+det(J)>0*
2. *1-tr(J)+det(J)>0*
3. *det(J)<1*

Las tres condiciones se satisfacen, ya que al ser $0 \le d \le 1$ resulta que $0 \le d(d+2) \le d+2 < 2d+3$, por lo cual $0\le\frac{d(d+2)}{2d+3}<1$ y $0\le\left(\frac{d(d+2)}{2d+3}\right)^2<1$. En consecuencia,

$$1+tr(J)+\det(J)=1+0-\left(\frac{d(d+2)}{2d+3}\right)^2>0$$

$$1-tr(J)+\det(J)>1-0-\left(\frac{d(d+2)}{2d+3}\right)^2>0$$

y

$$\det(J)=-\left(\frac{d(d+2)}{2d+3}\right)^2\le 0<1.$$

Esto conduce al siguiente resultado:

Proposición. El punto de equilibrio de Nash (q^*, q^*) es asintóticamente estable para todo d en el intervalo [0,1].

Simulación numérica

Con el propósito de mostrar la validez de los resultados obtenidos en las secciones anteriores, se presenta aquí la simulación del comportamiento del sistema (4) de acuerdo con la siguiente metodología: primero se fijan las condiciones iniciales y se varía el grado de diferenciación *d*, luego se fija el grado de diferenciación *d* y se hace variar las condiciones iniciales. Todos los valores asignados a los parámetros son pre establecidos por los autores.

La figura 1 muestra la estabilidad del equilibrio de Nash cuando el tamaño del mercado es 0.5 y el costo marginal es igual a 0.2 . Nótese que los valores de x e y son idénticas para cada valor de d; además la gráfica es continua y decreciente en correspondencia con el decrecimiento del punto de equilibrio a medida que aumenta el grado de diferenciación. La figura 2 muestra dos trayectorias de $q_1(t)$ y $q_2(t)$ para valores iniciales $(q_{10}), q_{20}) = (0.5,0.1)$, $(q_{10}), q_{20}) = (0.5,0.3)$ y parámetros a=0.5, c=0.2 y d=0.5, con el tiempo variando de 0 a 150.

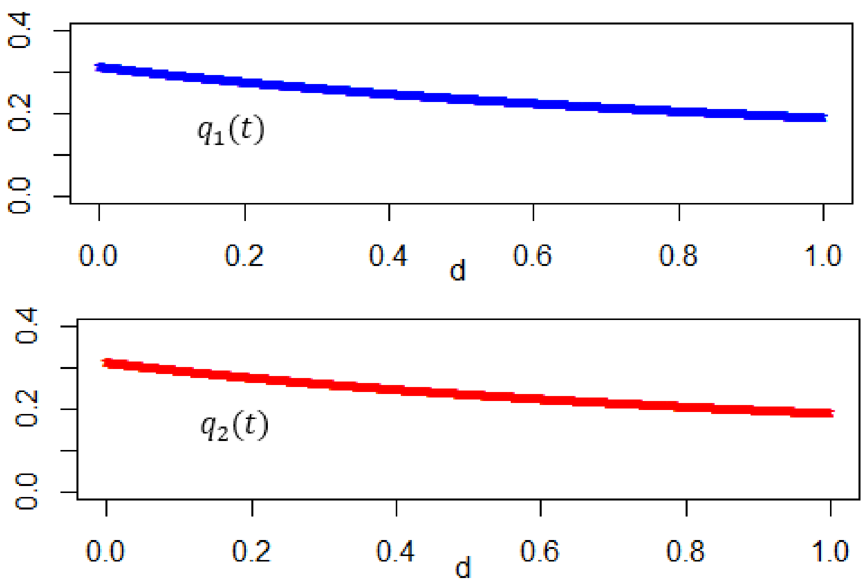

Figura 1. Diagrama de estabilidad del equilibrio con a=0.5, c=0.2 y condiciones iniciales $(q_{10}, q_{20}) = (1.8,0.1)$. El programa utilizado para la creación del diagrama fue el software estadístico R versión 4.1.1..1.

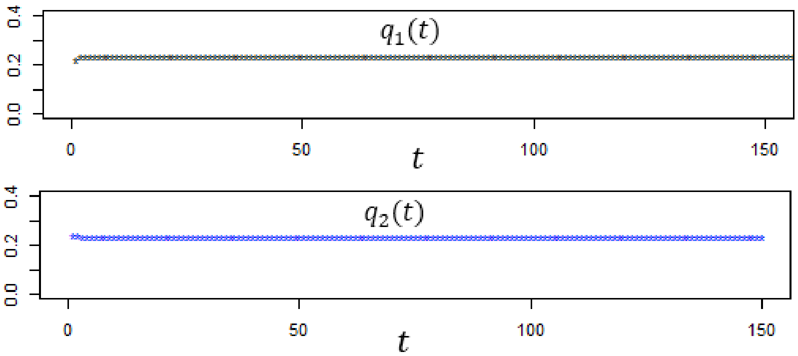

Figura 2. Sensibilidad a las condiciones iniciales del punto de equilibrio con a=0.5, c=0.2 y d=0.5. El programa utilizado para la creación del diagrama fue el software estadístico R versión 4.1.1.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presentó un nuevo juego no cooperativo de Cournot, en el cual la función de demanda inversa (precios) está dada por un polinomio de segundo grado en las cantidades de bien a producir por ambas empresas. A partir de este juego se concluye que:

1. El equilibrio de Nash simétrico para el juego no cooperativo de Cournot existe y es único para cualquier grado de diferenciación.
2. Bajo la regla de actualización estratégica de expectativa ingenua, el equilibrio de Nash simétrico es asintóticamente estable para cualquier grado de diferenciación.
3. La aplicación de la simulación numérica mediante el software estadístico R permite visualizar el comportamiento asintótico del equilibrio de Nash simétrico.
4. Dado que el equilibrio de Nash es simétrico y el beneficio alcanzado en este es positivo, entonces la permanencia en el mercado de las empresas solo es posible si ambas siguen la estrategia de imitación, es decir, cada empresa produce la misma cantidad de bien que su oponente en cada período de tiempo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Askar, S. S. (2014). The impact of cost uncertainty on Cournot oligopoly game with concave demand function [El impacto de la incertidumbre en el costo en un juego de oligopolio de Cournot con función de demanda cóncava]. Applied Mathematics and Computation 232,144–149.

Beath, J., y Katsoulacos, Y. (1991). The economic theory of product differentiation [Teoría económica de la diferenciación de productos]. Cambridge University

Press.

Bertrand, J. (1883). Review of Théorie Mathématique de la Richesse Sociale and Recherches sur les Principles Mathématique de la Théorie des Richesses [Revisión de la Teoría Matemática de la Riqueza Social e Investigación sobre los principios matemáticos de la teoría de la riqueza]. Journal des Savants 68, 499–508.

Bowley, A. L. (1924). Mathematical Groundwork of Economics: An Introductory Treatise [Fundamentos matemáticos de la economía: Un trato introductorio]. Oxford University Press, Oxford.

Chiang, A. C., y Wainwright, K. (2006). Métodos fundamentales de economía matemática (F. Sánchez y R. Arrioja, Trad.). McGraw-Hill. (Obra original publicada en 2004)

Cournot, A. A. (1838). Recherches sur les Principles Mathématique de la Théorie des Richesses [Investigación sobre los principios matemáticos de la teoría de la riqueza]. chez L. Hachette.

Dixit, A. (1979). A model of duopoly suggesting a theory of entry barriers [Un modelo de duopolio que sugiere una teoría de las barreras de entrada]. The Bell Journal of Economics, 10, 20-32.

Naimzada, A. y Tramontana, F. (2012). Dynamic properties of a Cournot–Bertrand duopoly game with differentiated products [Propiedades dinámicas de un juego de duopolio de Cournot-Bertrand cn productos diferenciados]. Economic Modelling, 29(4), 1436-1439.

Puu, T., y Sushko, I. (2002). Oligopoly dynamics: Models and tools [Dinámica del oligopolio: Modelos y herramientas]. Springer-Verlag.

Singh, N., y Vives, X. (1984). Price and quantity competition in a differentiated duopoly [Competencia en precios y cantidades en un duopolio diferenciado]. The Rand journal of economics, 546-554.

Szidarovszky, F. (1999). Adaptive expectations in discrete dynamic oligopolies with production adjustment costs [Expectativas adaptativas en oligopolios dinámicos discretos con ajuste de costos de producción]. Pure Mathematics and Applications 10(2), 133–139.