Revista Científica Tecnológica - RECIENTEC
ISSN 2708-7093
Vol. 5. Nº 2, Diciembre 2022/ P. 9-20
URL: https://www.revistarecientec.unan.edu.ni
email: revistarecientec@unan.edu.ni

Ciencias Agrícolas, Tecnología y Salud

ALGORITMOS DE ECUACIONES NO LINEALES POR POLINOMIOS DE ADOMIAN.

ALGORITHMS OF NONLINEAR EQUATIONS BY ADOMIAN POLYNOMIALS.

Dicson Antonio Méndez López[1].
Iván Augusto Cisneros Díaz[2].

RESUMEN

Este trabajo se realizó con el objeto de mejorar y optimizar los procesos iterativos de aproximación de soluciones a ecuaciones no lineales. El método de Newton es un algoritmo iterativo que permite resolver estos tipos de ecuaciones. La investigación desarrollada consistió en encontrar nuevos esquemas y métodos iterativos equivalente o superiores en el número de iteraciones al método de Newton. Este artículo científico plantea la relación natural que existe entre los Métodos de Descomposición de Adomian y la Técnicas Iterativa Variacional, estableciendo los vínculos matemáticos desarrollados en ambas esferas del conocimiento. Para las demostraciones de los nuevos esquemas y métodos iterativos se basó en el esquema de los Polinomios de Adomian y luego se combinó con las técnicas iterativas variacional, obteniéndose de estas maneras nuevas fórmulas iterativas de cálculo de raíces de ecuaciones no lineales. En todos los casos se utilizó una función auxiliar familia de las funciones exponenciales, ya que tienen la particularidad de ser funciones C^∞. El objetivo principal es demostrar dichas fórmulas iterativas y mostrar que la teoría matemática desarrollada en este campo científico, están fundamentadas teóricamente y analíticamente por métodos y procedimientos lógicos, que permiten desarrollar nuevos esquemas, métodos y técnicas iterativas. Los algoritmos son generados mediante los procedimientos de los Polinomios de Adomian y la Técnica Iterativa Variacional. Este trabajo presenta tres algoritmos nuevos que permiten encontrar las soluciones a ecuaciones no lineales en una cantidad menor de iteraciones que el método de Newton y por lo tanto son más eficientes que dicho método. Todos estos algoritmos fueron programados en el lenguaje de programación Python y se utilizó el paradigma de programación orientado a objetos (POO). Todos estos nuevos algoritmos presentan convergencia en dicha solución. Las ideas de este trabajo pueden extenderse para generar nuevos algoritmos con los Método de Abbasbandy y Cisneros en la búsqueda de algoritmos más eficientes.

PALABRAS CLAVE: MÉTODO DE NEWTON, POLINOMIOS DE ADOMIAN, ITERACIÓN VARIACIONAL, ALGORITMOS ITERATIVOS.

ABSTRACT

This work is carried out in order to improve and optimize the iterative processes of approximation of solutions of non-linear equations. Newton's method is an iterative algorithm that allows solving these types of equations. The research carried out consisted of finding new schemes and iterative methods equivalent to Newton's method. This thesis raises the natural relationship that

1. Licenciado en Física Matemática. Profesor, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua), Facultad Regional Multidisciplinaria de Matagalpa (UNAN-FAREM-Matagalpa). Correo electrónico: dicsonml@yahoo.es ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2910-3794

2. Doctor en Matemática Aplicada. Profesor, Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua (UNAN-Managua). Correo electrónico: ivan.cisneros@unan.edu.ni ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2014-1946

Recibido: 7 de octubre 2022
Aceptado: 5 de diciembre 2022

exists between Adomian Decomposition Methods and Variational Iterative Techniques, establishing the mathematical links developed in both spheres of knowledge. For the demonstrations of the new schemes and iterative methods, it was based on the Adomian Polynomial scheme and then combined with variational iterative techniques, obtaining in these ways new iterative formulas for calculating roots nonlinear equations. In all cases, a familiar auxiliary function of exponential functions was used, since they have the particularity of being C^∞ functions. The main objective is to demonstrate these iterative formulas and to show that the mathematical theory developed in this scientific field are theoretically and analytically based by logical methods and procedures, which allow the development of new iterative schemes and techniques. The algorithms are generated by the procedures of the Adomian Polynomials and the Variational Iterative Technique. This work presents fifteen new algorithms that allow finding solutions to nonlinear equations in a smaller number of iterations than Newton's method and therefore are more efficient than said method. All these algorithms were programmed in the Python programming language and the object-oriented programming paradigm (OOP) was used. All these new algorithms present convergence in said solution. The ideas of this work can be extended to generate new algorithms with the Abbasbandy and Cisneros Methods in the search for more efficient algorithms.

KEYWORDS: NEWTON'S METHOD, ADOMIAN POLYNOMIALS, VARIATIONAL ITERATION, ITERATIVE ALGORITHMS.

INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos fundamentales en matemática es el de ecuaciones, dependiendo del tipo de ecuaciones puede resolverse aplicando métodos geométricos, algebraicos o cálculo diferencial, más allá de un ejercicio teórico las ecuaciones pueden aplicarse a muchos problemas con enfoque en la vida real, como los relacionados con la matemática financiera, la física, la estadística, la econometría, entre otras disciplinas, sin embargo a medida que un modelo matemático describe mejor la realidad, este modelo requiere de ecuaciones más complejas, las cuales, algunas veces son irresolubles desde los procedimientos algebraicos convencionales, y para resolverlas se requiere de usar de un método numérico, uno de los métodos de resolución es el método de Newton.

El método de Newton permitió encontrar soluciones de ecuaciones mediante un método iterativo, donde se usaba un valor semilla, para luego sustituir los resultados en el método continuamente hasta encontrar la solución con una precisión determinada.

Los polinomios de Adomian se aplicaron a diversos problemas teóricos y prácticos, y una de las aplicaciones fue tratar de disminuir la cantidad de iteraciones en el método de Newton. Abbasbandy usando esta teoría desarrolló diversos métodos para disminuir las iteraciones al igual que Cisneros (2017) hizo importantes avances en este campo y logró desarrollar métodos numéricos s precisos que requerían menos iteraciones que el método de Newton.

Un proceso explorado también por Cisneros (2017), es el método de iteración variacional aplicado en el método de Newton, generando familias de algoritmos que disminuyen las iteraciones en el método de Newton.

Lo antes dicho justifica una investigación que permita diseñar nuevos algoritmos basado en la Técnica de Descomposición de los Polinomios de Adomian y de las Técnicas Iterativas Variacional, que permita resolver ecuaciones no lineales, la línea de investigación es del Álgebra y Análisis Matemático, y luego generar un conjunto de algoritmos que permitan generalizar el método de Newton y codificar estos algoritmos en programas computacionales, como el lenguaje de programación Python.

METODOLOGÍA

Dado lo apremiante del tema y la naturaleza de la composición de la comunidad universitaria de la FAREM-Matagalpa, se decidió hacer un estudio de la percepción del efecto de la pandemia en los miembros de la comunidad universitaria compuesta por estudiantes, docentes y personal administrativo. Para tal efecto se diseñó un cuestionario en el que se caracterizó a los encuestados desde el punto de vista de su afiliación con la universidad, las medidas preventivas tomadas por dichos miembros para prevenir el contagio del Covid-19, y del efecto que la pandemia había tenido en ellos desde su inicio al momento de la encuesta. El efecto se dividió en físico (contagiado / no contagiado), síntomas de la enfermedad y sus secuelas y el efecto multidimensional en el entorno del encuestado.

Para efecto de cumplir los requisitos estadísticos se estimó una muestra pirobalística de la población de aproximadamente 5,000 estudiantes, 220 docentes entre horarios y permanentes y 80 miembros de personal administrativo. Esto resultó en una muestra de 170 y se garantizó de que la información fuera recolectada aleatoriamente para garantizar la representatividad de los resultados. La información fue recolectada durante los meses de septiembre y octubre del 2021. Los datos fueron procesados en el software R y el análisis se centra en la descripción de la información obtenida con algunas extensiones de las implicaciones que dichos resultados indican.

MATERIALES Y MÉTODOS

La metodología empleada en este trabajo siguió las siguientes etapas:

1. Revisión bibliográfica sobre diversos artículos científicos sobre los Polinomios de Adomian y las Técnicas Iterativas Variacional.

2. Estudio de diversos procedimientos matemáticos que incluye los Polinomios de Adomian y las Técnicas Iterativas Variacional.

3. Formulación de nuevos esquemas y algoritmos iterativos.

4. Programar los algoritmos en Python.

5. Comparar la cantidad de iteraciones.

RESULTADOS

El método de Newton puede expresarse como:

Revista Científica Tecnológica - RECIENTEC
ISSN 2708-7093
Vol. 5. Nº 2, Diciembre 2022/ P. 9-20
URL: https://www.revistarecientec.unan.edu.ni
email: revistarecientec@unan.edu.ni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Se puede considerar la siguiente notación $f(x_n) = f$ y $f'(x_n) = f'$

Por lo tanto el método de Newton está dado por:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f}{f'}$$

Los polinomios de Adomian se construyeron para resolver ecuaciones diferenciales, pero tienen otros usos como ayuda al diseño de esquemas iterativos.

Para los fines de este trabajo se considera la ecuación no lineal $f(x) = 0, \alpha \in \mathbb{R}$ con una raíz de multiplicidad 1 de *f*. Según Cisneros (2017, p.52) el método consiste en construir una función en la forma:

$$h = c + N(h)$$

donde c es una constante y *N* es una función no lineal.

Y se crea a partir de *h* una serie infinita en la forma,

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} h_n$$

y la función no lineal *N* se descompone como

$$N(h) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

a los términos A_n se les llama polinomios de Adomian y están dados por la siguiente serie general

Revista Científica Tecnológica - RECIENTEC
ISSN 2708-7093
Vol. 5. Nº 2, Diciembre 2022/ P. 9-20

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i h_i\right)\right]_{\lambda=0} \quad ,$$

$$n = 0,1,2,3,\cdots$$

El método de Newton puede expresarse mediante los polinomios de Adomian como:

$$x_{n+1} = x_n - A_0$$

Donde A_0 sería el primer polinomio de Adomian

$$A_0 = N(h_0)$$

$$A_0 = \frac{f}{f'}$$

y, además

$$h_0 = \frac{f}{f'}$$

Siguiendo un proceso similar al seguido por Cisneros (2017), se deriva A_1 para obtener el segundo término de los polinomios de Adomian.

$$A_1 = \frac{d}{d\lambda} N(h_0 + h_1\lambda)|_{\lambda=0}$$

$$= h_1 N'(h_0 + h_1(0)) = h_1 N'(h_0)$$

$$A_1 = h_1 N'(h_0)$$

$$h_1 = \frac{f^2 \cdot f''}{2f'^3}$$

Revista Científica Tecnológica - RECIENTEC
ISSN 2708-7093
Vol. 5. Nº 2, Diciembre 2022/ P. 9-20
URL: https://www.revistarecientec.unan.edu.ni
email: revistarecientec@unan.edu.ni

Luego, resulta

$$N'(h_0) = \frac{d}{dh_0}\frac{h_0^2}{2}\frac{f''}{f'} = \frac{2h_0}{2}\frac{f''}{f'}$$

$$= h_0\frac{f''}{f'} = \left(\frac{f}{f'}\right)\left(\frac{f''}{f'}\right)$$

$$= \frac{f \cdot f''}{f'^2}$$

Por lo tanto

$$A_2 = h_1 N'(h_0) = \left(\frac{f^2 f''}{2f'^3}\right)\left(\frac{ff''}{f'^2}\right)$$

$$= \frac{f^3 f''^2}{2f'^5} = h_2$$

Nuevamente, para obtener el tercer coeficiente

$$A_3 = \frac{1}{2}\frac{d}{d\lambda}(h_1 + 2h_2\lambda)N'(h_0 + h_1\lambda)|_{\lambda=0}$$

$$A_3 = h_2 N'(h_0 + h_1\lambda)|_{\lambda=0}$$

$$+\frac{1}{2}h_1(h_1 + 2h_2\lambda)N'(h_0 + h_1\lambda)|_{\lambda=0}$$

$$A_3 = h_2 N'(h_0 + h_1\lambda)|_{\lambda=0}$$

$$+\frac{1}{2}h_1(h_1 + 2h_2\lambda)N''(h_0 + h_1\lambda)|_{\lambda=0}$$

$$A_3 = h_2 N'(h_0) + \frac{1}{2}h_1 h_1 N''(h_0)$$

$$A_3 = h_2 N'(h_0) + \frac{1}{2}h_1^2 N''(h_0)$$

Considerando que

$$h_0 = \frac{f}{f'}; \; h_1 = \frac{f^2 \cdot f''}{2f'^3}; \; h_2 = \frac{f^3 \cdot f''^2}{2f'^5}$$

Y, además

$$N'(h_0) = \frac{f \cdot f''}{f'^2}$$

$$N''(h_0) = \frac{d}{dh_0}\left(h_0 \frac{f''}{f'}\right) = \frac{f''}{f'}$$

Mediante los polinomios de Adomian se generaron los siguientes algoritmos, los cuales fueron presentados en diversos artículos por diferentes autores:

1) Método de Newton, considerando el primer término de los polinomios de Adomian.

$$x_{n+1} = x_n - A_0$$

Sustituyendo A_0 resulta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

2) Método de House Holder.

Considerando el segundo término de Adomian el cual es

$$A_1 = \frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3}$$

Revista Científica Tecnológica - RECIENTEC
ISSN 2708-7093
Vol. 5. Nº 2, Diciembre 2022/ P. 9-20

URL: https://www.revistarecientec.unan.edu.ni
email: revistarecientec@unan.edu.ni

Y como

$$x_{n+1} = x_n - A_0 - A_1$$

Entonces se obtiene el método de House Holder

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \frac{(f(x_n))^2 f''(x_n)}{2(f'(x_n))^3}$$

Existen diversos análisis de este método, aunque su deducción no se basa precisamente en los polinomios de Adomian, se hace mención en el artículo de Bahgat y Hafiz (2014, p.87).

Partiendo del siguiente esquema numérico, definido por los polinomios de Adomian (llamado método House Holder), se pueden obtener un conjunto de algoritmos que proporcionan las raíces en una cantidad menor de iteraciones que el método de Newton.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{h(x_n)}{h'(x_n)} - \frac{(h(x_n))^2 h''(x_n)}{2(h'(x_n))^3}$$

y tomando la función auxiliar $h(x_n) = f(x_n) \cdot g(x_n)$, es decir, $h = f \cdot g$, luego

$$h' = f'g + g'f$$

y

$$h = f g + 2f g + g f$$

Y por lo tanto si se sustituye resulta

$$x_{n+1} = x_n - \frac{fg}{f'g + g'f}$$
$$- \frac{(fg)^2[f''g + 2f'g' + g''f]}{2[f'g + g'f]^3}$$

De este esquema general y variando la función auxiliar g por familia de funciones exponenciales, obtenemos los siguientes nuevos algoritmos.

Algoritmo 1: Sea la función auxiliar $g(x) = e^{-\alpha f(x)}$ entonces el esquema iterativo toma la forma:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f}{(f' - \alpha f \cdot f')} - \frac{f^2(f'' - 2\alpha f' + \alpha^2 f)}{2(f' - \alpha f \cdot f')^3}$$

El valor óptimo de α es 0,01. Para este algoritmo la función debe ser monótona, continua y derivable y con $f'(x) \neq 0$.

El denominador del esquema $f' - \alpha f \neq 0$ en este caso el esquema iterativo no se puede aplicar por la presencia de una indeterminación. Cabe aclarar que se puede aplicar el método, aunque la función *f* no posea segunda derivada.

Algoritmo 2: *Sea la función auxiliar* $g(x) = f(x)e^{-\alpha f(x)}$ entonces el esquema iterativo toma la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f}{f' - \alpha f' \cdot f}$$
$$- \frac{f^2[f'' - 2\alpha f \cdot f' - \alpha f''^2 \cdot f + \alpha^2 f'^2 \cdot f]}{2[f' - \alpha f' \cdot f]^3}$$

Para este algoritmo la función debe ser monótona, continua, derivable y con $f'(c) \neq 0$ en la raíz c.

El denominador del esquema $f' - \alpha f' \cdot f \neq 0$ en este caso el esquema iterativo no se puede aplicar por la presencia de una indeterminación. Cabe aclarar que se puede aplicar el método, aunque la función *f* no posea segunda derivada.

Algoritmo 3: Sea la función auxiliar $g(x) = e^{-\alpha f^2}$ entonces el esquema iterativo toma la forma:

Revista Científica Tecnológica - RECIENTEC
ISSN 2708-7093
Vol. 5. Nº 2, Diciembre 2022/ P. 9-20
URL: https://www.revistarecientec.unan.edu.ni
email: revistarecientec@unan.edu.ni

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f}{f' - 2\alpha f^2 \cdot f'} - \frac{f^2\begin{pmatrix} f'' - 4\alpha f \cdot f'^2 - 2\alpha \cdot f'^2 \cdot f \\ -2\alpha \cdot f^2 \cdot f'' + 4\alpha^2 \cdot f^3 \cdot f'^2 \end{pmatrix}}{2(f'' - 2\alpha f^2 \cdot f')^3}$$

El valor óptimo de α es 0,01. Para este algoritmo la función debe ser monótona, continua, derivable y con $f'(c)\neq 0$ en la raíz c.

El denominador del esquema $f'-2\alpha f^2 \cdot f'\neq 0$ en este caso el esquema iterativo no se puede aplicar por la presencia de una indeterminación. Cabe aclarar que se puede aplicar el método, aunque la función f no posea segunda derivada.

Algoritmo 4: Sea la función auxiliar g(x)=e^(-f^') entonces el esquema iterativo toma la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f}{(f' - \alpha f'' \cdot f)} - \frac{f^2[f'' - 2\alpha f' \cdot f'' + (-\alpha f''' + \alpha^2 f''^2) \cdot f]}{2[f'' - \alpha f'' \cdot f]^3}$$

El valor óptimo de α es 1 . Para este algoritmo la función debe ser monótona, continua, derivable y con $f'(c)\neq 0$ en la raíz c.

El denominador del esquema $f'-\alpha f'' \cdot f\neq 0$ en este caso el esquema iterativo no se puede aplicar por la presencia de una indeterminación. No se puede aplicar el método si la función f no posee segunda derivada, porque se reduce al método de Newton.

Se considera la ecuación no lineal

$$e^{-x} - x^3 = 0$$

Los principales hallazgos respecto a esta ecuación no lineal son:

El método de Newton alcanza la raíz de dicha ecuación en 5 iteraciones, siendo la raíz real con 15 cifras decimales 0,772882959149210. Se toma como valor semilla a $x=1,5$.

Los algoritmos 1, 2, 3 y 4 generan la solución en 4 iteraciones superando al método de Newton en una iteración.

Se considera la ecuación no lineal

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

Esta ecuación fue usada por Cisneros (2017) y además por Bumbariu (2012, p.277) como ejemplo numérico.

Los principales hallazgos respecto a esta ecuación no lineal son:

El método de Newton alcanza la raíz de dicha ecuación en 5 iteraciones, siendo la raíz real con 15 cifras decimales 1,365230013414097. Se toma como valor semilla a $x=1,0$.

Los 1 y 2 algoritmos generan la solución en 4 iteraciones superando en una iteración al método de Newton, y los algoritmos 3 y 4 genera la solución en 3 iteraciones superando al método de Newton.

Se considera la ecuación no lineal

$$e^{-x} + 2\,ln\,x = 0$$

Los principales hallazgos respecto a esta ecuación no lineal son:

El método de Newton alcanza la raíz de dicha ecuación en 5 iteraciones, siendo la raíz real con 15 cifras decimales 0,798518085322251. Se toma como valor semilla a $x=1,5$.

Los algoritmos 1 y 3 generan la solución en 3 iteraciones, superando al método de Newton en dos iteraciones, mientras que 2 y 4 generan la solución en 4 iteraciones.

CONCLUSIONES

Las conclusiones referentes a la presente investigación se pueden sistematizar en las siguientes aseveraciones:

1. Generación de nuevos esquemas iterativos que representan 3 nuevas variantes del método de Newton por medio de la Descomposición de los Polinomios de Adomian y la variación iteracional.

2. Existencia de nuevos algoritmos, que constituyen variantes del método de Newton que superan al método clásico en el número de iteraciones necesarias para la obtención de una raíz simple.

REFERENCIAS

Bahgat, M. y Hafiz, M. (2014). THREE-STEP ITERATIVE METHOD WITH EIGHTEENTH ORDER CONVERGENCE FOR SOLVING NONLINEAR EQUATIONS. International Journal of Pure and Applied Mathematics Volume 93 No. 1, 85-94.

Bumbariu, O. (2012). AN ACCELERATION TECHNIQUE FOR SLOWLY CONVERGENT FIXED POINT ITERATIVE METHODS. Miskolc Mathematical Notes Vol. 13 (2012), No. 2, 271–281.

Cisneros, I. (2017). Algoritmos basados en los Polinomios de Adomian e Interación Variacional para la resolución de ecuaciones no lineales. Recuperado el 24 de junio de 2021, de Algoritmos basados en los Polinomios de Adomian e Interación Variacional para la resolución de ecuaciones no lineales: https://repositorio.unan.edu.ni/11014/