Revista
Torreón Universitario
ISSN 2410-5708 / e-ISSN 2313-7215
Año 14 | No. 39 | Febrero - Mayo 2025

Diagramas de Venn ampliados a los complementos de los eventos para resolver probabilidad condicional y teorema de Bayes

Marlon Antonio Hurtado Obando
Candidato a Doctor en Matemática Aplicada, UNAN-Managua
Máster en Matemática Aplicada. Licenciado en Matemática
Docente, UNAN-Managua
Universidad Nacional de Ingeniería, Managua, Nicaragua
https://orcid.org/0000-0002-6958-0715
hurtado.obando21@gmail.com

Enviado el 08 de abril, 2024 / Aceptado el 03 de diciembre, 2024
https://doi.org/10.5377/rtu.v14i39.20043

Palabras clave: Diagramas de Venn, probabilidad condicional, teorema de Bayes, complemento de un evento de probabilidad.

RESUMEN

Todos los caminos llevan a Roma, cita una vieja frase. En el mundo de las Matemáticas un determinado problema tiene muchas maneras de resolverse, algunas pueden ser complejas u otras muy sencillas y directas. Es importante destacar que la persona que trata de entender o aprender matemáticas necesita la vía más rápida de comprensión.

Los diagramas de Venn han sido muy utilizados en la solución de probabilidades entre ellas la condicional y Teorema de Bayes. Sin embargo, podemos a esta técnica ampliar los complementos de los eventos que se tratan en un determinado problema para optimizar cálculos y así poder responder a todas las preguntas de probabilidad que relaciona el problema.

Dentro de la técnica está formar las circunferencias entrelazadas indicando la región en común para cada uno de los eventos a tratar y así sus respectivos complementos. Al ser 2 eventos

Educación
ARTÍCULOS CIENTÍFICOS

Revista Torreón Universitario / Año 14 | No. 39 | Febrero - Mayo 2025 / ISSN: 2410-5708 / e-ISSN 2313-7215

se formarán 4 areas que se han nombrado como pétalos, los cuales equivalen a la diferencia o sumas con la probabilidad total de cada evento según sea el caso.

Keywords: Venn diagram, conditional probability, baye's theorem, complement of a probability event.

ABSTRACT

All roads lead to Rome, goes an old saying. In the world of mathematics, a given problem has many ways of being solved, some of which can be complex and others very simple and straightforward. It is important to note that the person trying to understand or learn mathematics needs the quickest way of understanding.

Venn diagrams have been widely used in the solution of probabilities including the conditional and Bayes' Theorem. However, we can use this technique to extend the complements of the events that are dealt with in each problem to optimize calculations and thus be able to answer all the probability questions that the problem relates to.

Within the technique is to form the interlocking circles indicating the common region for each of the events to be treated and thus their respective complements. As there are 2 events, 4 areas will be formed that have been named as petals, which are equivalent to the difference or sums with the total probability of each event as the case may be.

INTRODUCCIÓN

Historia de los diagramas de venn

Los diagramas de Venn llevan el nombre del lógico británico, John Venn. Él escribió sobre ellos en un artículo redactado en 1880 titulado "De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos" en la revista "Philosophical Magazine and Journal of Science".[1] (Cirrito, 2005)

Pero las raíces de este tipo de diagrama se remontan a un período muy anterior, al menos 600 años atrás. Alrededor del año 1200, el filósofo y lógico Ramon Llull (Raimundo Lulio en español) de Mallorca, usó un tipo de diagrama similar, escribió la autora M.E. Baron en un artículo redactado en 1969 que realizaba un seguimiento de su historia. Ella también atribuye el crédito al matemático y filósofo alemán, Gottfried Wilhelm von Leibnitz de haber dibujado diagramas similares a finales de 1600. (Cirrito, 2005)

En la década de 1700, el matemático suizo Leonard Euler (que se pronuncia Oy-ler) inventó lo que luego se conocería como "diagrama de Euler", el predecesor más directo del

1. En el siguiente enlace se logra apreciar en original la publicación realizada por el mismo John Venn: https://archive.org/details/londonedinburg5101880lond/page/n7/mode/2up?view=theater

diagrama de Venn. De hecho, John Venn se refería a sus propios diagramas como "círculos de Euler" y no "diagramas de Venn". El filósofo estadounidense Clarence Irving (C.I.) Lewis publicó por primera vez el término "diagramas de Venn" en su libro escrito en 1918 llamado, "A Survey of Symbolic Logic". (Cirrito, 2005)

Los diagramas de Venn continuaron evolucionando en los siguientes 60 años con avances de la mano de expertos, como David W. Henderson, Peter Hamburger, Jerrold Griggs, Charles E. "Chip" Killian y Carla D. Savage. Su trabajo se centraba en los diagramas de Venn simétricos y su relación con los números primos o aquellos indivisibles por otros números que no sean 1 y el número mismo. Uno de estos diagramas simétricos, basado en el número primo 7, se conoce ampliamente en las esferas matemáticas como "Victoria". (Cirrito, 2005)

Otros nombres destacados en el desarrollo de los diagramas de Venn son A. W. F. Edwards, Branko Grunbaum y Henry John Stephen Smith. Entre otras cosas, modificaron las figuras en los diagramas para permitir una representación más sencilla de los diagramas de Venn en un número cada vez mayor de conjuntos. (Cirrito, 2005)

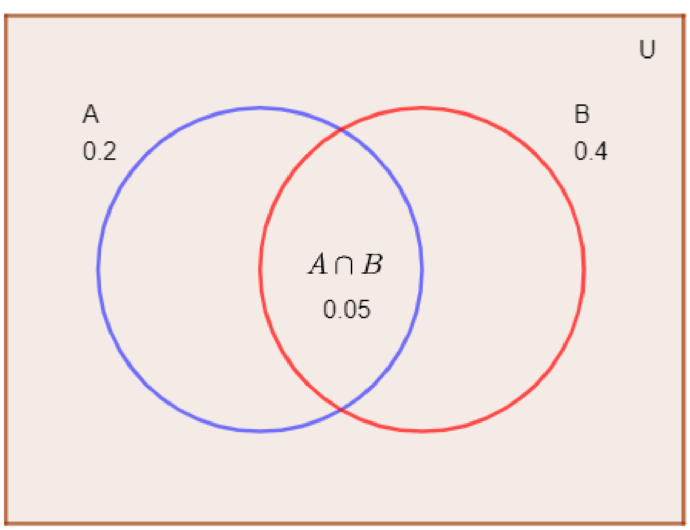
PROBABILIDAD CONDICIONAL

Como definición formal se conoce que, sean los sucesos A y B, la probabilidad de que ocurra A sabiendo que ocurrió B, puede hallarse usando:

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

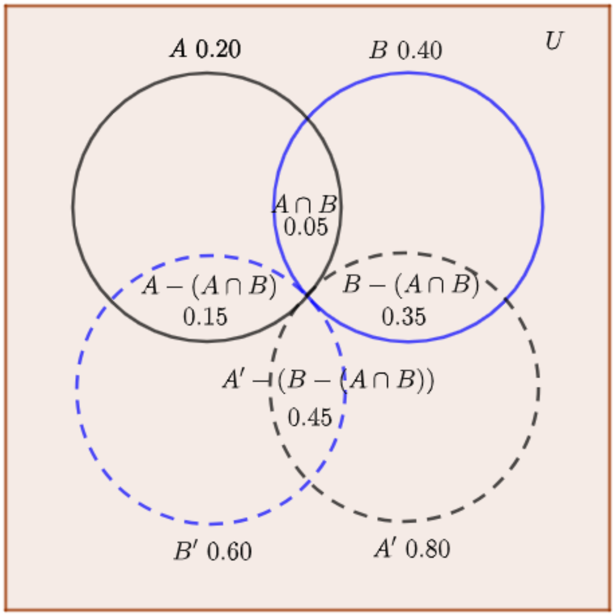
DIAGRAMA DE VENN AMPLIADO AL COMPLEMENTO DE SUS EVENTOS.

A manera de ejemplo, asumimos que A y B son dos eventos de un determinado experimento cuyas probabilidades son: $\boldsymbol{P(A)=0.2, P(B)=0.4}$ y $\boldsymbol{P(A \cap B)=0.05}$, al representar dicha información en un diagrama de Venn obtenemos:



Revista Torreón Universitario / Año 14 | No. 39 | Febrero - Mayo 2025 / ISSN: 2410-5708 / e-ISSN 2313-7215

A manera de propuesta, se plantea agregar a dicho diagrama, los complementos de los eventos correspondientes, así como sus probabilidades a cada evento.



En el grafico anterior, se puede apreciar una simple operación de resta para deducir el valor de probabilidad en cada uno de los pétalos

Ejemplo 1. En promedio la mayoría de los autores por no decir todos resuelven este tipo de problemas de la siguiente manera. El siguiente ejemplo[2] ha sido tomado de (Cirrito, 2005). Cito a continuación la solución expresada por el libro antes mencionado.

EXAMPLE 15.12 Two events A and B are such that $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$ and $P(A \cup B) = 0.6$.

Find (a) $P(A|B)$. (b) $P(B|A)$ (c) $P(A'|B)$

Solution

(a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$, therefore we need to find $P(A \cap B)$.

Using the addition rule we have $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$0.6 = 0.5 + 0.3 - P(A \cap B)$$

$$\therefore P(A \cap B) = 0.2$$

Therefore, $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.2}{0.3} = \dfrac{2}{3}$

(b) $P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)} = \dfrac{0.2}{0.5} = 0.4$.

(c) $P(A'|B) = \dfrac{P(A' \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P(B) - P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.3 - 0.2}{0.3} = \dfrac{1}{3}$

2. Ejemplo Cirrito página 500 del contenido probabilidad condicionada, tomado de manera integra.

Dentro de las observaciones que se pueden realizar en este proceso, es la cantidad de adecuaciones de la formula condicional y la manipulación algebraica en la que se puede incurrir.

PROPUESTA DE SOLUCIÓN

Los Diagramas de Venn, son diseños estructurales de información mediante la lógica y el cálculo, de manera que podemos manipularlos sin alterar las leyes matemáticas junto con la razón lógica y así poder resolver e interpretar un determinado problema.

De manera que, si construimos un diagrama de Venn y ubicamos la información, podemos brindar respuestas de manera más directa sin necesidad de mucho cálculo.

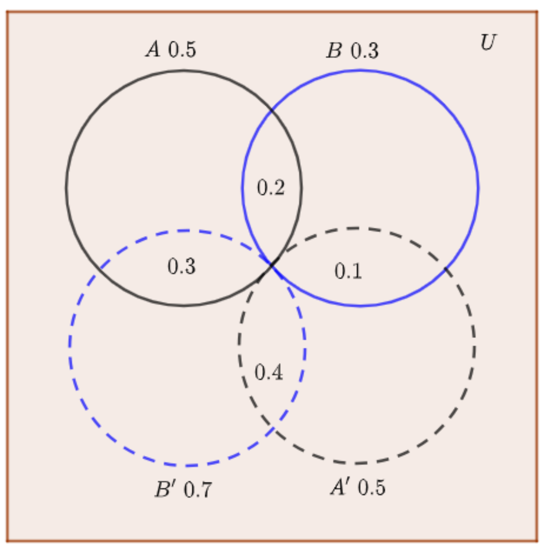
Algo importante en notar es que nuestros cálculos, cierran de manera correcta por donde iniciemos a verificar el diagrama.

Por tanto, la solución viene dada de la siguiente manera observando nuestro diagrama mostrado abajo,

a $P(A/B) = de\ todo\ B\ lo\ que\ le\ pertenece\ en\ A = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$

b $P(B/A) = de\ todo\ A\ lo\ que\ le\ pertenece\ a\ B = \frac{0.2}{0.5} = \frac{2}{5}$

c $P(A'/B) = de\ todo\ B\ lo\ que\ le\ pertenece\ a\ A' = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3}$



Muchos problemas aún más complejos en la probabilidad condicional pueden ser resueltas mediante este método.

Ejemplo 2: Este ejemplo es basado en un problema. En un congreso el 30% de los asistentes habla francés, el 60% habla inglés y el 80% habla al menos uno de los dos idiomas. Elegido un asistente al azar,

Revista Torreón Universitario / Año 14 | No. 39 | Febrero - Mayo 2025 / ISSN: 2410-5708 / e-ISSN 2313-7215

a. ¿Cuál es la probabilidad de que hable tanto inglés como francés?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés, si se sabe que habla al menos uno de los dos idiomas?

Solución:

Es conocido según el problema que,

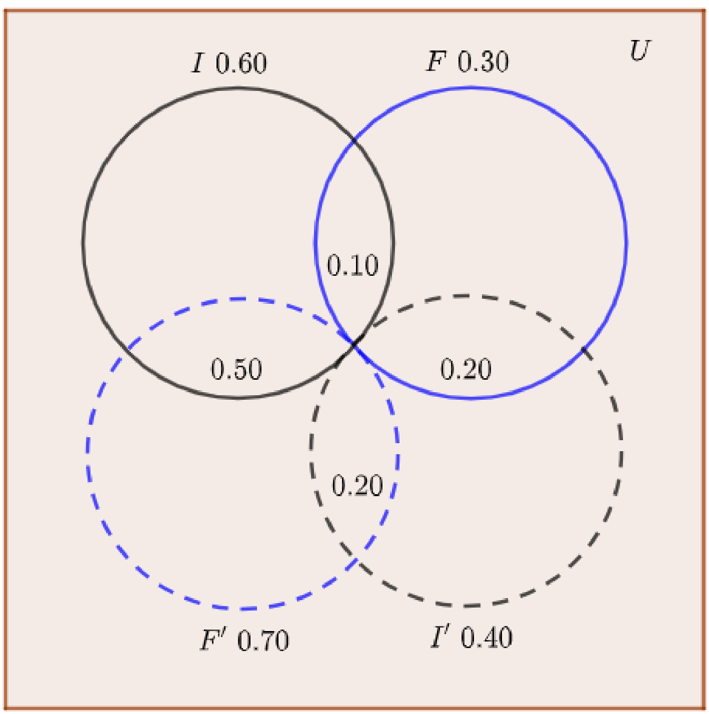
$$P(F)=0.3, P(I)=0.6, P(I \cup F)=0.8$$

De ello podemos deducir

$$P(I \cup F)=P(I)+P(F)-P(I \cap F)$$

$$P(I \cap F)=0.6+0.3-0.8=0.10$$

La representación en diagrama de Venn es el siguiente,



Respondemos a las preguntas planteadas observando el diagrama,

a. ¿Cuál es la probabilidad de que hable tanto inglés como francés?

La probabilidad es de 0.10

b. ¿Cuál es la probabilidad de que hable inglés, si se sabe que habla al menos uno de los dos idiomas?

$$P(I/(I \cup F)) = \frac{P\big(I \cap (I \cup F)\big)}{P(I \cup F)} = \frac{region\ de\ I}{union\ de\ I\ con\ F} = \frac{0.10 + 0.50}{0.50 + 0.10 + 0.20} = \frac{3}{4}$$

DIAGRAMA DE VENN AMPLIADO AL COMPLEMENTO DE SUS EVENTOS APLICADO AL TEOREMA DE BAYES.

Como vimos anteriormente, la probabilidad condicional proporciona un medio por el cual podemos ajustar la probabilidad de un evento in línea de una nueva información. El teorema de Bayes, desarrollado por Rev. Thomas Bayes (1702-1761), hace lo mismo, excepto que esta vez proporciona un medio de ajuste a un conjunto de probabilidades asociadas en la línea de la nueva información. (Cirrito, 2005)

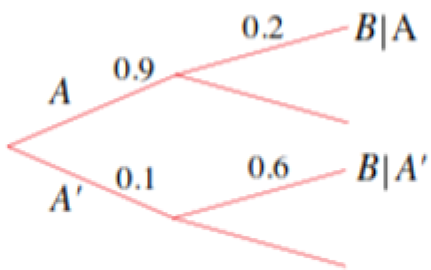
Su expresión matemática es la siguiente:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) \times P(B|A)}{P(A) \times P(B|A) + P(A') \times P(B|A')}$$

Analizamos un ejemplo más tomado de (Cirrito, 2005)

Ejemplo 3: En una pequeña ciudad, se encontró que el 90% de los conductores siempre usan su cinturón. En el 60% de ocasiones, si un conductor no llevara puesto su cinturón de seguridad seria multado por exceso de velocidad. Mientras que, si ellos portan su cinturón, el 20% de las veces serian multados por exceso de velocidad. Encuentre la probabilidad que un conductor quien fue multado por exceso de velocidad usara su cinturón de velocidad.

La solución que ofrecen muchos autores es la siguiente, captura tomada del libro de la Mathematic Higher Level.



$$= P(A/B)$$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A) \cdot P(B/A)}{P(A) \cdot P(B/A) + P(A') \cdot P(B/A')}$$

$$P(A/B) = \frac{0.9 * 0.2}{0.9 * 0.2 + 0.1 * 0.6} = \frac{18}{24}$$

Revista Torreón Universitario / Año 14 | No. 39 | Febrero - Mayo 2025 / ISSN: 2410-5708 / e-ISSN 2313-7215

Nuestra propuesta de solución nos lleva a lo siguiente:

Establecemos, primeramente, los eventos según lo descrito en el problema:

A: el conductor porta su cinturón de seguridad, *P(A)=0.90*

A´: el conductor no porta cinturón de seguridad, *P(A')=0.10*

B: el conductor es multado por exceso de velocidad

Luego realizamos el diagrama de Venn:

Por información del problema, tenemos:

$$P(B/A')=0.6$$

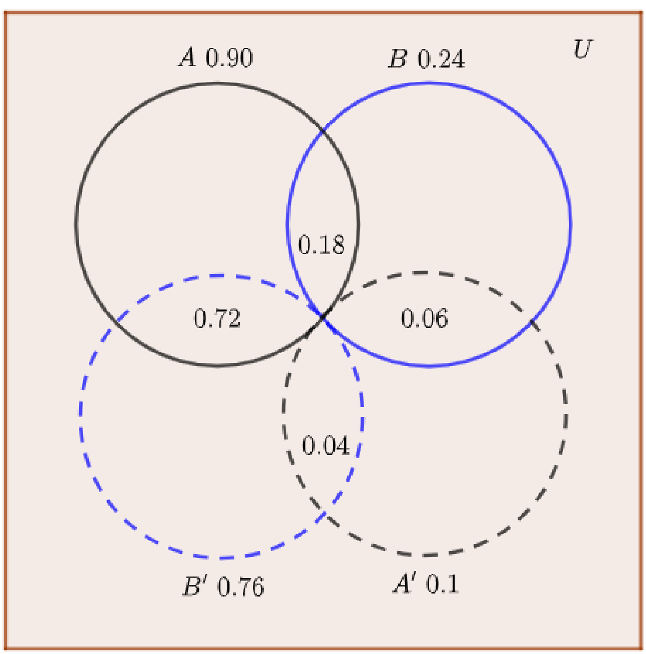
Por definición de probabilidad condicional y sabiendo que obtenemos,

$$0.6=\frac{P(B\cap A')}{P(A')}\Longrightarrow \boldsymbol{P(B\cap A')=0.06}$$

De manera similar, para , sabiendo que , resulta,

$$0.2=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}\Longrightarrow \boldsymbol{P(B\cap A)=0.18}$$

Con esta información podemos perfectamente completar nuestro diagrama de Venn.



La pregunta al problema podemos resolverla de manera sencilla,

$$P(A/B) = de\ todo\ B\ lo\ que\ le\ pertenece\ en\ A = \frac{0.18}{0.24} = 0.75 = \frac{18}{24}$$

CONCLUSIONES

Los diagramas de Venn nos permiten realizar un análisis y calculo mas eficaz en la solución de problemas que envuelven probabilidad Condicional y Teorema de Bayes.

Una de las cosas interesantes de la Matemáticas, es que podemos resolver un mismo problema de muchas maneras, pero lo principal es poder resolverlo de la manera más optima, fácil o directa. Sin duda alguna se desea que las personas que aprenden matemáticas y probabilidades puedan tener a su alcance una manera sencilla y eficaz de poder resolver dicho problema.

Lo importante es representar muy bien el diagrama de Venn junto con su información y así poder responder a cualquiera de las preguntas que nos realicen sin necesidad de mucho proceso algebraico.

REFERENCIAS

Academy, k. (s.f.). khanacademy. https://es.khanacademy.org/math/ap-statistics/probability-ap/stats-conditional-probability/a/conditional-probability-using-two-way-tables

Cirrito, F. (2005). Mathematics Higher Level. IBID press. Qué es un diagrama de Venn?: https://www.lucidchart.com/pages/es/que-es-un-diagrama-de-venn

Harcet, J., Heinrichs, L., Seiler, P. M., & Torres Skoumal, M. (2014). Mathematics Higher Level, STATISTICS. Great Britain: Oxford University Press.

Lucidchart. (enero de 2024). Lucidchart. https://www.lucidchart.com/pages/es/que-es-un-diagrama-de-venn